

MVE340 Matematik B för  
Sjöingenjörer  
2010/2011  
Läsvecka 6-7

---

---

---

---

---

---

---

---

## Omfattning

- Emanuelsson:
  - Kapitel 6.1: Linjära ekvationssystem
  - Kapitel 7: Vektorer, linjer och plan

---

---

---

---

---

---

---

---

## Kapitel 6.1: Linjära ekvationssystem

### Viktiga begrepp

- Linjärt ekvationssystem
- Koefficientmatris (till ett ekvationssystem)
- Totalmatris, utökad matris (till ett ekvationssystem)
- Lösning till ekvationssystem, ekvivalens
- Eliminationsmetoden
- Elementär radoperation, radekvivalens
- Trappstegsform
- Pivot position, pivot kolonn
- Fri variabel
- Bunden variabel
- Konsistent ekvationssystem
- Inkonsistent system
- Rang

---

---

---

---

---

---

---

---

### Mål 6.1

**För betyget godkänd skall du kunna:**

- lösa linjära ekvationssystem med eliminationsmetoden

**För högre betyg skall du dessutom kunna:**

- förklara varför eliminationsmetoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exempel 1

Ett linjärt ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Elementära radoperationer

- **Addition** Ersätt en ekvation med summan av den ekvationen och en multipel av en annan ekvation.
- **Platsbyte** Låt två ekvationer byta plats.
- **Skalning** Multiplicera koefficienterna i en ekvation med en konstant (utom 0).

---

---

---

---

---

---

---

---

### Observation:

- Elementära radoperationer är reversibla.
- Man återfår "det gamla" ekvationssystemet genom en elementär radoperation på "det nya".
- De två systemen kallas **radekvivalenta**.
- **Sats** Radekvivalenta ekvationssystem har samma lösningsmängder, de är alltså **ekvivalenta**

Vi skriver  $ES1 \Leftrightarrow ES2$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exempel 1

**Totalmatrisen** (den utökade matrisen) till det linjära ekvationssystemet i exempel 1 är:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Elementära radoperationer på totalmatriser

- **Addition** Ersätt en rad med summan av raden och en multipel av en annan rad
- **Platsbyte** Låt två rader byta plats
- **Skalning** Multiplicera koefficienterna i en rad med en konstant (utom 0)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Radekvivalens

- Totalmatriser som erhålls ur varandra genom radoperationer kallas **radekvivalenta**.

Vi skriver  $M_1 \sim M_2$

- Radekvivalenta totalmatriser hör till ekvivalenta ekvationssystem.

---

---

---

---

---

---

---

---

### Två fundamentala frågor om ekvationssystem

- Är systemet konsistent, *existerar* någon lösning?
- Om det finns minst en lösning, är den i så fall *unik, entydig*?

---

---

---

---

---

---

---

---

### En matris har trappstegsform om:

- Under en rad med bara nollor finns inget annat än nollor.
- Det första nollskilda elementet i varje rad är till höger om det första nollskilda elementet i raden ovanför.
- Under det första nollskilda elementet i en rad (och under nollorna till vänster om detta element) finns endast nollor.

---

---

---

---

---

---

---

---

Vilka av matriserna är i  
trappstegsform?  
Reducerad trappstegsform?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Definition

Det första nollskilda elementet i en rad i en matris som har trappstegsform kallas **pivotelement** i trappstegsmatrisen. Platsen där det står kallas **pivotposition**.

En kolonn i A som innehåller en pivotposition kallas en **pivotkolonn**.

Antalet pivotelement i en trappstegsmatris radekvivalent med A kallas **rang** för A

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Kapitel 7: Vektorer, linjer och plan

#### Viktiga begrepp

- Koordinatsystemet
- Punkter, riktade sträckor, vektorer
- Längd av vektor, avstånd mellan punkter
- Addition av vektorer, multiplikation med skalär
- Skalärprodukt, dotprodukt, ortogonalitet
- Vektorprodukt, kryssprodukt
- Räta linjens ekvation
- Planets ekvation
- Vinklar och avstånd
- Skärning mellan linjer, mellan plan, mellan linje och plan

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Mål Kapitel 7

**För betyget godkänd skall du kunna:**

- 7.2 beräkna avstånd mellan punkter och längd av vektorer i rummet
- 7.2-3 utföra grundläggande vektorräkning: addition, multiplikation med skalär, skalärprodukt, vektorprodukt
- 7.2 bestämma ekvation för en linje genom given punkt och med given riktningsvektor
- 7.2 bestämma ekvation för en linje genom två givna punkter
- 7.2 avgöra om två vektorer eller två linjer är vinkelräta mot varandra
- 7.3 bestämma ekvation för ett plan genom given punkt och med given normalvektor
- 7.3 bestämma ekvation för ett plan genom tre givna punkter
- 7.3 Bestämma skärningspunkter mellan linje och plan
- 7.4 Bestämma skärningspunkter mellan två eller flera plan

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Mål Kapitel 7

**För högre betyg skall du dessutom kunna:**

- 7.2 bestämma vinkeln mellan två vektorer eller två linjer
- 7.2 bestämma skärningspunkten mellan två eller flera linjer
- 7.3 bestämma vinkeln mellan en vektor eller en linje och ett plan
- 7.2-3 använda vektorer för problemlösning
- 7.5 beräkna area och volym med hjälp av vektorer

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 7.1

- Koordinatsystem, punkter, riktade sträckor, vektorer.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 7.2

- Vektoraddition, multiplikation med skalär, standardbasen.
- Vektorlängd, avstånd mellan punkter.
- Skalärprodukt (dot-produkt)
- Ortogonalitet, vinklar.
- Råta linjens ekvation (parameterform)
- Vinklar mellan linjer

---

---

---

---

---

---

---

---

## 7.3, 7.4

- Vektorprodukt (kryssprodukt)
- Momentberäkning
- Planets ekvation
- Skärningspunkter

---

---

---

---

---

---

---

---

## 7.5

- Area och volym

---

---

---

---

---

---

---

---